Numb. 218.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS.

For the Months of November *and* December, 1695.

The CONTENTS.

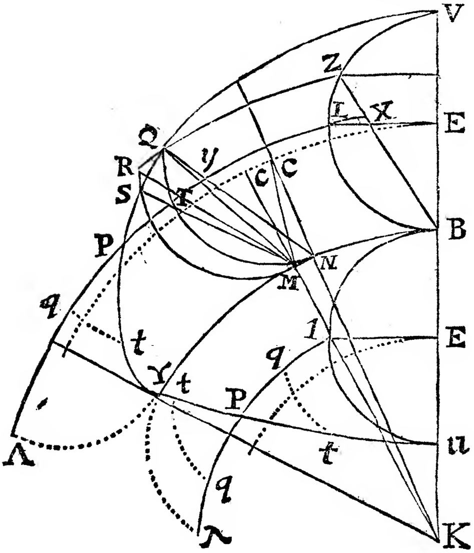
I. *Propoſitio Generalis Arearum dimenſionem exhibens in univerſo illo Curvarum Genere, quæ revolutione æquabili Circuli ſuper Baſin quamvis, vel rectilineam vel Circularem deſcribi poſſint; nempe omnium Cycloidum vel Epicycloidum, quovis modo genitarum. Cum Demonſtratione Quadraturæ portionis* Epicycloidis *à Domino* Caſwell *inventæ, (Numb.* 217. *p.*114. *promiſſâ) per* E. Halley. II. *An Extract of the Journals of two ſeveral Voyages of the Engliſh Merchants of the Factory of* Aleppo, *to* Tadmor, *anciently call'd* Palmyra. III. *Some Account of the ancient State of the City of* Palmyra, *with ſome ſhort Remarks on the Inſcriptions found there: With an Obſervation of the Latitude of* Aleppo, *and the aſcertaining of the Geographical Site of the Ancient* Aracta, *and ſeveral Cities in* Syria. *By* E. Halley.

I. *Propoſitio Generalis Arearum dimenſionem exhibens in univerſo illo Curvarum Genere quæ revolutione æquabili Circuli ſuper Baſin quamvis vel rectilineam vel Circularem deſcribi poſſint, &c.*

Notum eſt Cycloidem primariam, ſicut etiam Prolatam ac Contractam (quas Trochoides vocant) à Celeberrimo Walliſio aliiſque uberrime tractatas fuiſſe; earumque proprietates dudum innotuiſſe: ut jam vix liceat quicquam novi de iis comminiſci. At in nupero tractatu Cl. *de la Hire*, nonnulla de Epicycloidis primariæ proprietatibus prodidit: cujus occaſione ingenioſiſſimus *Caſwellus*, non ſolum dimenſionem Areæ totius ſpatii Epicycloidalis etiam in partibus obtinere locum invenit: ſed etiam perfectam Spatii Curvilinei *V P L* Quadraturam exhibuit. Ejuſdem vero demonſtrationem, (cum minime obvia ſit, ac ab Inventore nondum prodita) dum quærerem, incidi forte in Generalem hanc quam damus Propoſitionem, quâ menſurantur ſpatia Curvilinea omnia Generis Cycloidalis vel Epicycloidalis, tam tota, quam per partes. Atque etiam non ſolum Spatia *V P L*, ſed etiam innumera *Q T P* ac *V Q T L* accuratæ Quadraturæ capacia eſſe demonſtravi; idque non tantum in Epicycloidibus primariis, ſed etiam in prolatis vel contractis. Propoſitio autem hæc eſt.

Area Cycloidis vel Epicycloidis, ſive Primariæ ſive Contractæ vel Prolatæ, eſt ad Aream Circuli Generantis; atque etiam Areæ partium genitarum in iiſdem Curvis, ad Areas analogorum ſegmentorum Circuli :: ut ſumma duplæ Velocitatis centri ac velocitatis motus circularis, ad Velocitatem motus circularis.

Demonſtratio.



Deſcribatur Epicyclois quævis *Υ P S Q V B* revolutione circuli *V L B* ſuper Baſi circulari *Υ M N B*; ponatur centrum circuli generantis in *c*, ductaque *c M K*, inſiſtat circulus Baſi in puncto *M*; ſitque punctum lineans *S*. Jam diviſis motibus, transferatur primum motu circulari punctum *S* in *R*, ut augeatur arcus *S M* particulâ indiviſibili *R S*; deinde progrediatur centrum *c* in *C*; hoc motu, traducto ſegmento *R S M* in ſitum *Q T N*, punctum *Q* tanget Curvam. Patet Triangulum *R S M* eſſe momentum ſive fluxionem Areæ ſegmenti circuli: Trapezium vero *Q S M N* eſſe fluxionem Areæ ſpatii curvilinei ſimul geniti. Jam cum *S M*, *R M*, *Q M*, non niſi puncto inter ſe differre intelligantur,

gantur, concipe areolam $QSMN$ conſtare ex tribus ſectoribus RMS, RMQ, MQN; adeoque areolam RMS eſſe ad Areolam $QSMN$, ut eſt angulus RMS ad ſummam trium angulorum $RMS + RMQ + MQN$. At anguli $RMQ + MQN$ æquantur angulis $MCN + MKN$, ſive angulo cMC; propter lineas RM, QN, invicem inclinatis ſub angulo ipſi MKN æquali, ac propter angulum MQN ipſius MCN dimidium (per *Eucl.* 3. 20.) Proinde angulus RMS eſt ad angulos $RMS + cMC$, hoc eſt, (per eandem 3.20.) arcus $\frac{1}{2} RS$ ad duos arcus $Cc + \frac{1}{2} RS$, ſive RS ad $2Cc + RS$; ut areola RSM, ad areolam $QSMN$: ſive ut momentum ſegmenti circularis QTN ad momentum ſegmenti in Epicycloide ſimul geniti $QSYMN$. Cumque hæc momenta ſemper ſint in eadem illa ratione, ubicunque aſſumpſeris punctum Q, conſtat Areas ipſas QTN, $QSYMN$ his momentis genitas, eandem conſtantem habere rationem, nempe velocitatis motus circularis RS, ad duplam velocitatem centri addito motu circulari, ſive $2Cc + RS$. Sicut etiam Aream VBZ ad Aream $QVBN$, ac proinde ſemicirculum VLB ad ſpatium Curvilineum $VQYNB$. *Ergo conſtat Propoſitio.* Nulla autem alia eſt differentia in modo demonſtrandi, ſi circulus genitor ſuper arcu Baſis Concavæ moveatur, niſi quod angulus cMC, hoc in caſu, ſit differentia angulorum MCN, MKN. Si vero Baſis ſit linea recta, evaneſcente MKN, ac ob RM, QN parallelas, etiam facilior erit probatio. Deducendis ex hac propoſitione Corollariis, cum in promptu ſint, libenter abſtineo: In omnibus autem hujuſmodi Curvis portiones analogæ portionibus illis, quas in Cycloide primariâ perfectæ Quadraturæ capaces invenit Cl. Walliſius, ſunt æque quadrabiles, quod quidem facile conſequitur ex præmiſſis.

Centro K, per punctum Q duc circularem arcum QZ, ac age ZB abſcindens ſegmentum ZLB æquale ſegmento QTN, Dein biſeca ſemicirculum VB in L, ac per punctum L, centro etiam K, deſcribe arcum PL, ſecantem Epicycloidem in P, circulum Genitorem in T, ac Chordas QN, ZB in y & X. Jam ſit Arcus $VZ = a$, ejuſque ſinus $= s$, Radius Genitoris $= r$, Radius vero Baſis $= R$; ſitque arcus CE ſive motus centri $= m$. Patet ſectorem CKE eam rationem habere ad ſpatium $XyNB$, quam habet quadratum ex KE, ad differentiam quadratorum ex KL & KB; ſive ut $RR + 2Rr + rr$

ad

ad $2Rr + 2rr$; hoc eſt ut $R + r$ ad $2r$, vel KE ad BV; ac proinde rectangulum BE in CE ſive rm æquari ſpatio $XyNB$. Spatium vero VZB æquale eſt rectang. $\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}sr$; adeoque, juxta noſtram propoſitionem, erit ut a ad $2m$, ita $\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}sr$, ad $\frac{mar + msr}{a}$, æquale Spatio Curvilineo $QVZLBNQ$: Ex hoc ſubduc ſpatium $XyNB = rm$, & remanebit ſpatium $QVZXy = \frac{mrs}{a}$: Cumque ſpatia ZXL, QyT æquentur inter ſe, ſpatium $QVLTQ$ etiam æquabitur ipſi $\frac{mrs}{a}$: Quoties itaque a ad m, ſive motus circularis ad progreſſivum centri, fuerit in data ratione, dabitur etiam perfecta Quadratura ſpatiorum curvilineorum $QVLTQ$: Totumque ſpatium VPL ad Quadratum Radii BE erit in eadem ratione motuum m ad a, hoc eſt, in omni Epicycloide primariâ, in ratione radiorum KE ad KB, quæ eſt ipſa Domini *Caſwelli* Propoſitio. Spatia autem minora $QVLTQ$ erunt inter ſe ut ſinus Arcuum VZ; ac ſpatia Triangularia QTP eodem argumento erunt ut Sinus Verſi arcuum QT vel ZL: ac proinde etiam Quadrantur. Pari modo probabuntur ſpatia $\mathrm{P}\Lambda\Upsilon$, pLu, $p\lambda\Upsilon$ ſemper eſſe ad Radii BE quadratum (in omnibus his figuris) in prædicta ratione m ad a; eorumque portiones pqt, ut Sinus Verſi arcuum interceptorum qt. Reſidua autem ſegmenta, ut $qt\Upsilon\Lambda$, $qt\Upsilon\lambda$, &c. erunt ut Sinus recti complimentorum eorundem arcuum qt.

Componitur autem ratio velocitatum m ad a, ex ratione radiorum KE, BE, ac ratione angulorum ſimul æquabiliter deſcriptorum CKE, VEZ: ac proinde datâ etiam illâ angulorum ratione, etiam Quadrabuntur ſpatia omnia Epicycloidalia prædicta.

Omnibus his Curvis Tangentes ducere in promptu eſt, earumque Longitudines ſive Rectificationes, ex Areis quibuſdam ipſis analogis, jam inveniſſe mihi videor: cujus rei occaſione Familia hæc Curvarum uberius aliquando forſan tractabitur.

II. *An*